Dodécaèdre

Dans tout le problème $\mathcal{E}$ désigne l'espace géométrique usuel rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On ne manquera pas, pour tout ce qui suit, de se rapporter, pour plus de commodité, au dessin fourni à la fin de l'énoncé.

1. On pose $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $b=\dfrac{1}{a}$.

1.a Montrer que a est solution d'une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
Montrer qu'il en est de même pour b.

1.b Calculer $b, ab, a+b, b-a$ et a^2+b^2.
(On mettra les résultats sous la forme $x+y=\sqrt{5}$ avec x, y rationnels.)

2. Etant donnée une droite $\mathcal{D}$ de l'espace $\mathcal{E}$, on appelle demi-tour d'axe $\mathcal{D}$ l'application qui a tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que le milieu du segment $[M,M']$ soit le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.
On suppose que M a pour coordonnées (x,y,z). Exprimer les coordonnées des points M', M'', M''' images du points M par les demi-tours d'axes respectifs $(O;\vec{i})$, $(O;\vec{j})$ et $(O;\vec{k})$.

3. On définit les huit sommets $ABCDA'B'C'D'$ d'un cube noté $\mathcal{C}_0$ comme suit par leurs coordonnées :

$$A(1,1,1),\ B(-1,1,1)\ \ C(-1,-1,1),\ D(1,-1,1)$$

A', B', C', D' désignent leurs symétriques respectifs par rapport à O.

3.a Montrer l'existence d'un point unique $J(a,0,b')$ avec $b'>1$ tel que $JA=JD=2a$ et exprimer b' en fonction de b.

3.b I désigne le transformé de J dans le demi-tour d'axe $(O;\vec{k})$, I' et J' sont les transformés respectifs de I et J dans la symétrie par rapport à O. Déterminer les points I, I', J' par leurs coordonnées.

4. On définit de même K, L, M, N ainsi que leur symétriques respectifs K', L', M', N' par rapport à O par les conditions suivantes :
(i) $\overrightarrow{KL}=2a\vec{j}$, $KB'=KD=2a$, K et L se correspondent dans le demi-tour d'axe $(O,\vec{i})$ et la première coordonnée de K est supérieure à 1.
(ii) $\overrightarrow{MN}=2a\vec{k}$, $NA=NB=2a$, M et N se correspondent dans le demi-tour d'axe $(O,\vec{j})$ et la seconde coordonnée de N est supérieure à 1.
Préciser en fonction de a et b les coordonnées de ces huit nouveaux points.

5. L'ensemble des vingt points :

$$A, B, C, D, I, J, K, L, M, N, A', B', C', D', I', J', K', L', M', N'$$

ainsi définis déterminent un dodécaèdre qui sera considéré comme l'ensemble de ces vingt points.
On appelle face du dodécaèdre l'un des douze sous-ensembles de sommets suivants :

$$AJDKL, LKB'I'C', ALC'MN, NMD'K'B, ANBIJ, MC'I'J'D'$$

ainsi que les six autres obtenus par symétrie par rapport à O.

5.a Montrer que les points $AJDKL$ appartiennent à un même plan et donner une équation de ce plan.

5.b Donner aussi une équation de la face $ANBIJ$.

5.c Observer que les distances AJ, JD, DK, KL et LA sont égales. On pose d leur valeur commune.

6. On note Ω l'isobarycentre des points $AJDKL$.

6.a Déterminer les coordonnées du point Ω.
(N.B. On laissera ces coordonnées sous la forme $x+y\sqrt{5}$ avec x et y rationnels).

6.b Observer que les distances $\Omega A, \Omega J, \Omega D, \Omega K, \Omega L$ sont égales. On pose r leur valeur commune.

6.c Vérifier que $d=\dfrac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Cette dernière relation permet d'assurer que $AJDKL$ est un pentagone régulier, il en est de même des autres faces.

